ממן 16

מגישים: דוד דדון ודר בנטוב

תאריך: 22.02.18

# תיאור הפתרון וסיבוכיות:

**מבנה הנתונים שנבחר** לפתרון הבעיה שלנו יוגדר ע"י שימוש בשתי ערמות:

* ערמת מקסימום – תכיל את האיברים הקטנים שהגיעו עד כה בקלט.
* ערמת מינימום – תכיל את האיברים הגדולים שהגיעו עד כה בקלט.
* גודל הערמות:
  + גודל הערמות יהיה לכל ערמה (N הוא גודל הקלט). קביעה זו מתבססת על הנחה שהקלט מתקבל כמערך ולכן ניתן לחשב את גודלו בתחילת ריצת התוכנית. אם לא כך הדבר, ניתן יהיה להתאים את הערמות כך שיתנו מענה עד לנקודת הבדיקה השלישית (מתקבלת כנתון).
  + הגדרת גודל הערמה באופן זה "פותרת" אותנו מלתת מענה לגלישה מכיוון שאנו לא צפויים להיתקל בה באופן זה.

הפעולות יתבצעו באופן הבא:

* Insert(x) – הכנסת מפתח x:
  + אם ערימת המקסימום ריקה - מכניסים לערמת המקסימום.
  + אם לא - בודקים אם x קטן מהמקסימום של ערמת המקסימום:
    - אם כן – מכניסים לערמת המקסימום.
    - אם לא – מכניסים לערמת המינימום.
  + בודקים אם נדרש לאזן בין כמות האיברים בכל ערמה:
    - אם כן – מוציאים את המקס/מינ מערמת המקס/מינ ומעבירים לערמת המינ/מקס.
    - אם לא – לא עושים כלום.
  + סיבוכיות זמן:
    - בדיקה האם איבר קטן -
    - הכנסה לערמה - - ע"ב השגרה Insert מהספר בתורי קדימויות.
    - בדיקה איזון בין הערמות -
    - הוצאת מקס/מינ מערמה - – ע"ב השגרה Extract-max מהספר
    - הכנסה לערמה -
    - **סה"כ הפעולות ירוצו בזמן -**
* printMedian() – הדפסת האיבר החציוני:
  + מדפיסים את האיבר המקסימלי בערמת המקסימום (בלי להוציא אותו).
  + **סיבוכיות הזמן היא**  מכיוון שנחזיר את ערך התא הראשון המערך המהווה את ערמת המקסימום בדומה לשגרה Maximum בתורי קדימויות.

דוגמא לריצה:

נריץ את התוכנית עבור מערך בן 20 איברים ונוודא שהתוכנית רצה כמצופה.

נקודות הבדיקה שיתקבלו יהיו לאחר האיברים ה-5, 10 ו-15. (ע"פ המתבקש בתרגיל).

בשונה מריצה רגילה בריצה זו נדפיס גם את מצב המחסניות בכל נקודת בדיקה ע"מ שנוכל לנתח טוב יותר את הנתונים המתקבלים מהאלגוריתם.

המערך המתקבל כקלט מהבחירה הרנדומלית בדוגמא הוא:

Input Array:

[4, 253, 584, 97, 432, 303, 621, 645, 64, 348, 633, 405, 409, 268, 601, 667, 644, 582, 129, 420]

**לאחר נקודת הבדיקה 5:**

Median in check point #5: 253

MaxHeap: [253, 97, 4]

MinHeap: [432, 584]

* ניתן לראות שהחציון (253) הוא איבר הראשון (המקסימום) בערמת המקסימום וש-5 האיברים שעברנו עליהם עד כה מסודרים בערמות ע"פ התנאים שהגדרנו בעמוד הקודם.
* האפסים מסמנים את המקומות הריקים בערמות.

**לאחר נקודת הבדיקה 10:**

Median in check point #10: 303

MaxHeap: [303, 253, 64, 97, 4]

MinHeap: [348, 432, 621, 645, 584]

* ניתן לראות שהחציון (303) הוא איבר המקסימום בערמת המקסימום וש-10 האיברים שעברנו עליהם עד כה מסודרים בערמות ע"פ התנאים שהגדרנו.

**לאחר נקודת הבדיקה 15:**

Median in check point #15: 405

MaxHeap: [405, 348, 253, 303, 4, 64, 97, 268]

MinHeap: [409, 432, 584, 601, 633, 621, 645]

* ניתן לראות שהחציון (405) הוא איבר המקסימום בערמת המקסימום וש-15 האיברים שעברנו עליהם עד כה מסודרים בערמות ע"פ התנאים שהגדרנו.

מצב הערמות בסיום יהיה:

MaxHeap: [409, 405, 348, 303, 253, 64, 97, 268, 4, 129]

MinHeap: [420, 432, 582, 644, 601, 621, 645, 667, 633, 584]

לא הדפסנו חציון כיוון שלא מדובר בנקודת בדיקה אך במצב זה החציון יהיה 409 שהוא המקסימום בערמת המקסימום.

הוכחת נכונות:

**שמורת הלולאה**: בסיום כל הכנסת איבר ערך המקסימום בערמת המקסימום מהווה את האיבר החציוני עד כה.

ערמת מקסימום תכיל את האיברים הקטנים שהגיעו עד כה בקלט.

ערמת מינימום תכיל את האיברים הגדולים שהגיעו עד כה בקלט.

**אתחול**: האיבר הראשון נכנס לערמת המקסימום, הוא האיבר היחיד בערמה ולכן הוא יהיה המקסימום בה. מכיוון שהוא האיבר היחיד שקיבלנו עד כה הוא גם החציון.

ערמת מקסימום תכיל את האיברים הקטנים שהגיעו עד כה בקלט.

ערמת מינימום תכיל את האיברים הגדולים שהגיעו עד כה בקלט.

השמורה מתקיימת.

**תחזוקה**: בהינתן איבר חדש x :

* אם הוא קטן מהחציון:
  + נכניס אותו לערמת המקסימום. מכיוון שהוא קטן מהמקסימום הוא חייב להיות קטן מכל האיברים בערמת המינימום.
  + אם נדרש לאזן בין הערמות נוציא את האיבר המקסימלי מערמת המקסימום ונעביר לערמת המינימום. גם פה קיבלנו שכל האיברים בערמת המקסימום קטנים מהאיברים בערימת המינימום כי היחיד שעבר הוא האיבר הגדול ביותר בערמת המקסימום.
  + בסה"כ ערמת המקסימום מכילה את האיברים הקטנים שהגיעו עד כה בקלט.
* אם הוא גדול מהחציון:
  + נכניס אותו לערמת המינימום. מכיוון שהוא גדול מהמקסימום של ערמת המקסימום הוא חייב להיות גדול מכל האיברים שם.
  + אם נדרש לאזן בין הערמות נוציא את האיבר המינימלי מערמת המינימום ונעביר לערמת המקסימום. גם פה קיבלנו שכל האיברים בערמת המקסימום קטנים מהאיברים בערימת המינימום כי היחיד שעבר הוא האיבר הקטן ביותר בערמת המינימום.
  + בסה"כ ערמת המינימום תכיל את האיברים הגדולים שהגיעו עד כה בקלט.
* האיבר המקסימלי של ערמת המקסימום גדול מ- מהאיברים וקטן מ- ולכן מהווה את החציון.
* הראנו ששמורת הלולאה מתקיימת.
* **כלומר בכל נקודת בדיקה בדרך החציון יוחזק כמקסימום של ערמת המקסימום במבנה הנתונים שלנו.**

**סיום:**

* בסיום הוכנסו n איברים לערמה, בהינתן ששמורת הלולאה מתקיימת האיבר המקסימלי של ערמת המקסימום הוא חציון האיברים שהתקבלו כקלט מהמערך.